8.1.7 Vlastnosti posloupností II

Předpoklady: 020407, 080106

Opět opakování z funkcí:
Funkce $f(x)$ se nazývá neklesající, právě když pro všechna $x_1; x_2$ z definičního oboru platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Funkce $f(x)$ se nazývá nerostoucí, právě když pro všechna $x_1; x_2$ z definičního oboru platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Př. 1: S užitím definic nerostoucí a neklesající funkce zformuluj definici nerostoucí a neklesající posloupnosti. Využij symboliku používanou u posloupností. Zformuluj analogické věty pro určování těchto vlastností podle vztahů pro a_n a a_{n+1}.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá neklesající, právě když pro všechna $r, s \in N$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r \leq a_s$.
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá nerostoucí, právě když pro všechna $r, s \in N$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r \geq a_s$.
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, právě když pro všechna $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, právě když pro všechna $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

Pedagogická poznámka: Po minulé hodině nepůsobí předchozí příklad žádné problémy, kromě toho, že studentům připadá zbytečné všechno psát.

Př. 2: Porovnej definice rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající posloupnosti. Které druhy posloupností mají podobné definice? V čem se liší? Jaké to má důsledky?

Definice se liší v nerovnostech. Existují dvě dvojice:
posloupnost rostoucí $(a_r < a_s)$ $\Leftrightarrow$ posloupnost neklesající $(a_r \leq a_s)$,
posloupnost klesající $(a_r > a_s)$ $\Leftrightarrow$ posloupnost nerostoucí $(a_r \geq a_s)$.

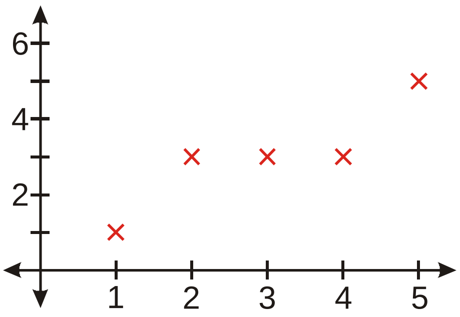
Například v první dvojici rozdíl v nerovnostech znamená, že člen rostoucí posloupnosti musí být větší než jeho předchůdce, zatím co člen neklesající může být větší nebo stejný jako jeho předchůdce.

Př. 3: Rozhodni, jaký vztah existuje mezi rostoucími a neklesajícími posloupnostmi. Jaký je vztah mezi klesajícími a nerostoucími?

Všechny rostoucí posloupnosti jsou neklesající.
Všechny klesající posloupnosti jsou nerostoucí.

Př. 4: Načrtni graf posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{5}$, která je neklesající, ale není rostoucí.

Pro členy posloupnosti musí platit $a_{n+1} \geq a_n$, ale nesmí pro ně platit $a_{n+1} > a_n$ $\Rightarrow$ alespoň jednou musí dojít k tomu, že dva po sobě následující členy se budou rovnat $\Rightarrow$ možností je mnoho.



Př. 5: Říkají věty: „Posloupnost je nerostoucí" a „Posloupnost není rostoucí" to samé?

Neříkají. Například posloupnost $\left([-1]^n\right)_{n=1}^{\infty}$ není rostoucí, ale není nerostoucí.
Věta: „Posloupnost je nerostoucí" tvrdí, že posloupnost má speciální vlastnost.
Věta: „Posloupnost není rostoucí" naopak tvrdí, že posloupnost speciální vlastnost nemá.

Opět opakování z funkcí:
Funkce $f(x)$ se nazývá shora omezená, právě když existuje reálné číslo H takové, že pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \leq H$.
Funkce $f(x)$ se nazývá zdola omezená, právě když existuje reálné číslo d takové, že pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \geq d$.

Př. 6: S užitím definic pro shora omezenou a zdola omezenou funkci zformuluj definici shora omezené a zdola omezené posloupnosti. Využij symboliku používanou u posloupností.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá shora omezená, právě když existuje reálné číslo H takové, že pro všechna $n \in N$ platí: $a_n \leq H$.
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá zdola omezená, právě když existuje reálné číslo d takové, že pro všechna $n \in N$ platí: $a_n \geq d$.

Př. 7: Zjisti, které z následujících posloupností jsou shora omezené, zdola omezené a které jsou omezené.

a) $\left(\frac{2n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left([-1]^n n^2\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left([-1]^n \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

a) $\left(\frac{2n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Vypíšeme několik prvních členů: $1;\frac{3}{2};\frac{5}{3};\frac{7}{4};\frac{9}{5};...$ $\Rightarrow$ zdá se, že posloupnost je rostoucí, ale její hodnoty se přibližují ke dvojce $\Rightarrow$ zřejmě je zdola omezena jedničkou a shora dvojka $\Rightarrow$

- testujeme $a_n \geq 1$: $\frac{2n-1}{n} \geq 1 \quad / \cdot n$ (u posloupností $n \geq 1$ $\Rightarrow$ můžeme vynásobit nerovnost *n* nebát se změny nerovnosti)
  $2n-1 \geq n$
  $n \geq 1$¨- přesně tato čísla za *n* dosazujeme $\Rightarrow$ nerovnost $a_n \geq 1$ platí,
- testujeme $a_n < 2$: $\frac{2n-1}{n} < 2 \quad / \cdot n$ (u posloupností $n \geq 1$)
  $2n-1 < 2n$
  $-1 < 0$ platí vždy $\Rightarrow$ nerovnost $a_n < 2$ platí.

Dohromady: $1 \leq a_n < 2$ $\Rightarrow$ posloupnost je omezená na interval $\langle 1;2)$.

b) $\left([-1]^n n^2\right)_{n=1}^{\infty}$

Vypíšeme několik prvních členů: $-1;4;-9;16;-25;...$ $\Rightarrow$ je zřejmé, že posloupnost není omezená ani zdola ani shora, absolutní hodnota členů posloupnosti jde k nekonečnu (jako hodnoty funkce $y = x^2$ a kvůli výrazu $[-1]^n$ se jejich znaménko neustále střídá.

c) $\left([-1]^n \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Vypíšeme několik prvních členů: $-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};-\frac{1}{5};...$

Posloupnost se skládá ze dvou částí:

- $\frac{1}{n}$ jsou čísla, která jdou od 1 k nule (čím větší *n* tím menší hodnota zlomku jako u funkce $y = \frac{1}{x}$) $\Rightarrow$ absolutního hodnota každého dalšího členu posloupnosti je menší než členu předchozího,
- výraz $[-1]^n$ neustále střídá znaménko členů posloupnosti,

$\Rightarrow$ posloupnost je omezena na interval $\left\langle -1;\frac{1}{2} \right\rangle$.

Jak můžeme odhadnout, ke kterému číslu se blíží členy posloupnosti? Co ukazuje u posloupnosti $\left(\frac{2n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ na to, že se její hodnoty pro velká *n* přibližují ke dvěma?

Zkusíme si do posloupnosti dosadit několik čím dál větších čísel:

- $n = 100 \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \cdot 100 - 1}{100} = \frac{199}{100}$
- $n = 1000 \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \cdot 1000 - 1}{1000} = \frac{1999}{1000}$

- $n = 10000 \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \cdot 10000 - 1}{10000} = \frac{19999}{10000}$

$\Rightarrow$ role, kterou ve výsledku hraje –1 v čitateli zlomku, se neustále snižuje $\Rightarrow$ výsledek se přibližuje zlomku $\frac{2n}{n} = 2$.

Pedagogická poznámka: Takto vysvětlená představa limity nepůsobí studentům problémy a po dvou příkladech u tabule limity bez problémů nalézají.

K problému „hledání čísel, kterým se přibližují členy posloupností“, se v dílu o posloupnostech ještě vrátíme.

Př. 8: Rozhodni zda jsou následující posloupnosti omezené (omezené shora nebo zdola). Pokud ano, urči na jaké intervaly.

a) $\left(\frac{5n+1}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left([-1]^n \frac{3n-1}{2n} + 3\right)_{n=1}^{\infty}$

a) $\left(\frac{5n+1}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Vypíšeme několik prvních členů: $2; \frac{11}{6}; \frac{16}{9}; \frac{21}{12}; \frac{26}{15}; ...$ $\Rightarrow$ zdá se, že posloupnost je klesající:

- testujeme $a_n \leq 2$: $\frac{5n+1}{3n} \leq 2 \quad / \cdot n$ (u posloupností $n \geq 1$)

  $5n + 1 \leq 2 \cdot 3n$

  $1 \leq n$ - přesně tato čísla za n dosazujeme $\Rightarrow$ nerovnost $a_n \leq 2$ platí,

$\Rightarrow$ hledáme, ke kterému číslu se členy posloupnosti blíží, pro velká n posloupnost vypadá přibližně jako $\frac{5n}{3n} = \frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ členy posloupnosti se blíží $\frac{5}{3}$ $\Rightarrow$

- testujeme $a_n > \frac{5}{3}$: $\frac{5n+1}{3n} > \frac{5}{3} \quad / \cdot 3n$ (u posloupností $n \geq 1$)

  $3(5n+1) > 5 \cdot 3n$

  $15n + 3 > 15n$

  $3 > 0$ platí vždy $\Rightarrow$ $a_n > \frac{5}{3}$,

dohromady: $\frac{5}{3} < a_n \leq 2$ $\Rightarrow$ posloupnost je omezená na interval $\left(\frac{5}{3}; 2\right\rangle$.

b) $\left([-1]^n \frac{3n-1}{2n} + 3\right)_{n=1}^{\infty}$

Vypíšeme si několik prvních členů: $2; \frac{17}{4}; \frac{5}{3}; \frac{35}{8}; ...$ $\Rightarrow$ nebudeme to počítat dál, stejně si z toho nic nepředstavíme $\Rightarrow$ podíváme se na jednotlivé části vzorce:

- $\frac{3n-1}{2n}$ $\Rightarrow$ vytváří čísla, která se u různých členů liší,
- $[-1]^n$ $\Rightarrow$ pouze mění znaménko předchozího členu,

- $+3 \Rightarrow$ k výsledku předchozích operací přičítáme stále stejné číslo,

$\Rightarrow$ prostudujeme část $\frac{3n-1}{2n}$ a pak domyslíme, co s ní dělá zbytek posloupnosti.

Několik prvních členů posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}=\left(\frac{3n-1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$: $1;\frac{5}{4};\frac{4}{3};\frac{11}{8};\dots$

$\Rightarrow$ rostoucí posloupnost, hodnoty se blíží $\frac{3}{2}$,

- testujeme $b_n \geq 1$: $\frac{3n-1}{2n}\geq 1 \quad /\cdot n$ (u posloupností $n\geq 1$)

  $3n-1\geq 2n$

  $n\geq 1$ - přesně tato čísla za n dosazujeme, takže nerovnost platí
- testujeme $b_n<\frac{3}{2}$: $\frac{3n-1}{2n}<\frac{3}{2} \quad /\cdot 2n$ (u posloupností $n\geq 1$)

  $6n-2<6n$

  $-2<0$ platí vždy

$\Rightarrow$ posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}=\left(\frac{3n-1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je omezená v intervalu $\left\langle 1;\frac{3}{2}\right)$, pro velká čísla n se členy blíží k $\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ zpět k původní posloupnosti:

$\left([-1]^n\frac{3n-1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\Rightarrow$ část $[-1]^n$ prohazuje znaménka $\Rightarrow$ posloupnost se střídavě blíží k $\frac{3}{2}$ a $-\frac{3}{2}$

$\left([-1]^n\frac{3n-1}{2n}+3\right)_{n=1}^{\infty}$ $\Rightarrow$ k číslu 3 přičítáme střídavě čísla blížící se k $\frac{3}{2}$ a $-\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ výsledné hodnoty se blíží k $3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ a $3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$,

$\Rightarrow$ posloupnost $\left([-1]^n\frac{3n-1}{2n}+3\right)_{n=1}^{\infty}$ je omezená na interval $\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Pedagogická poznámka: K bodu b) se většina studentů nedostane. Pro ty co se k němu prokoušou, je těžký právě kvůli tomu, že si ho musí rozdělit na několik částí a ty řešit postupně. Což je přesně to, co studenti neumí.

Př. 9: Petáková:
strana 66/cvičení 7 b) d) f)

Shrnutí: Při ověřování omezenosti porovnáváme vzorec pro n-tý člen s konkrétním číslem.